

矢通量分裂-TVD 杂交新格式及其应用

中国科学院工程热物理所 王保国 陈乃兴

摘 要

在贴体曲线坐标系中,本文提出了一个高分辨率的新格式,它是 Steger-Warming 的矢通量分裂与 Harten 的 TVD (Total Variation Diminishing) 格式的杂交,用于计算跨音速定常流动和捕获激波。典型的跨音速内流和叶栅流的算例表明:在 60×15 网格下捕获的激波过渡区不超过两个网格,证明其分辨率较高;分析激波附近的数值结果,没出现“低亏、过跳”、伪振荡现象;与实验结果的比较表明,对定常流在无人附加耗散项的条件下它能给出较高质量无数值波动的激波流场解。

一、曲线坐标系中特征矢量矩阵及其逆矩阵

在贴体曲线坐标系中守恒型 Euler 方程组的矢量形式是:

$$\partial \bar{U} / \partial t + \partial \bar{F} / \partial x^1 + \partial \bar{G} / \partial x^2 = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \sqrt{g} \bar{U}, \quad \bar{U} = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T, \\ \text{式中 } \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{bmatrix} &= \sqrt{g} \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} [\bar{U}, \bar{F}, \bar{G}]^T, \\ \bar{F} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e + p)u]^T, \quad \bar{G} = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e + p)v]^T, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 g_{ij} 为贴体曲线坐标系 (x^1, x^2) 的协变度量张量; g 表示由 g_{ij} 组成的 Jacobian 行列式值; ρ 为密度; p 为压强; e 为广义内能; u 和 v 为直角坐标系 x 和 y 方向上气流分速; x_1^i, x_2^i 等表示 $\partial x^i / \partial t, \partial x^i / \partial x, \partial x^i / \partial y$; 令 $\bar{A} = \partial \bar{F} / \partial \bar{U}, \bar{B} = \partial \bar{G} / \partial \bar{U}, A = \partial \bar{F} / \partial U$ 以及 $B = \partial \bar{G} / \partial U$, 于是

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} [I, \bar{A}, \bar{B}]^T \quad (3)$$

式中 I 表示单位矩阵; 显然矩阵 A 和 B 的特征值分别为:

$$(a^1, a^2, a^3, a^4) = (\omega^1, \omega^1, \omega^1 + a \sqrt{g^{11}}, \omega^1 - a \sqrt{g^{11}}) \quad (4)$$

$$(b^1, b^2, b^3, b^4) = (\omega^2, \omega^2, \omega^2 + a \sqrt{g^{22}}, \omega^2 - a \sqrt{g^{22}}) \quad (5)$$

式中 g^{11} 和 g^{22} 定义为 x^1, x^2 坐标系的逆变度量张量; a 为当地音速; ω^1 和 ω^2 分别为气流速度在曲线坐标系 x^1 和 x^2 方向上的逆变分速度; 显然, 对应于 A, B 的特征矢量矩阵 R_x^1, R_x^2 满足:

$$A = R_x^1 \Lambda_x^1 L_x^1 \quad (6)$$

$$B = R_x^2 \Lambda_x^2 L_x^2 \quad (7)$$

式中 $\Lambda_x^1 = \text{diag} \{a^i\}, \Lambda_x^2 = \text{diag} \{b^i\}$ 即表示对角线上元素分别是 A 与 B 的特征值的对角矩阵。在曲线坐标系 (x^1, x^2) 中特征矢量矩阵的一般表达式为:

$$R \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & b \\ u & \rho g_2 & b(u + ag_1) & b(u - ag_1) \\ v & -\rho g_1 & b(v + ag_2) & b(v - ag_2) \\ c\beta & \rho(ug_2 - vg_1) & b(a_1 + a\theta) & b(a_1 - a\theta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

这个矩阵的逆为:

$$L \equiv \begin{bmatrix} 1 - \beta a_2 & mu a_2 & mv a_2 & -ma_2 \\ (vg_1 - ug_2)/\rho & g_2/\rho & -g_1/\rho & 0 \\ n(\beta - a\theta) & n(ag_1 - mu) & n(ag_2 - mv) & mn \\ n(\beta + a\theta) & -n(ag_1 + mu) & -n(ag_2 + mv) & mn \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: $\beta = (\gamma - 1)(u^2 + v^2)/2$, $m = \gamma - 1$, $a = (\gamma P/\rho)^{1/2}$, $a_2 = 1/(a)^2$, $n = 1/(\rho a \sqrt{2})$,

$b = \rho/(a \sqrt{2})$, $c = 1/(\gamma - 1)$, $a_1 = [\beta + (a)^2]c$, $\theta = ug_1 + vg_2$,

$g_i = \kappa_i / [(\kappa_1)^2 + (\kappa_2)^2]^{1/2}$, ($i = 1, 2$), γ 为比热比

$$\left. \begin{array}{l} \text{(对于 A)} \\ \text{(对于 B)} \end{array} \right\} K_1 = \begin{cases} \partial x^1 / \partial x \\ \partial x^2 / \partial x \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(对于 A)} \\ \text{(对于 B)} \end{array} \right\} K_2 = \begin{cases} \partial x^1 / \partial y \\ \partial x^2 / \partial y \end{cases}$$

二、曲线坐标系中新的杂交格式

在贴体曲线坐标系中对于定常流问题杂交格式可表达为:

$$\begin{aligned} & [I + h(\nabla_x^1 A^+ + \Delta_x^1 A^- + \nabla_x^2 B^+ + \Delta_x^2 B^-)]_{j,k} U_{j,k}^* \\ & = -M(\tilde{F}_{j+1/2,k}^* - \tilde{F}_{j-1/2,k}^* + \tilde{G}_{j,k+1/2}^* - \tilde{G}_{j,k-1/2}^*) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} M^* &= U^{*-1} - U^*, \quad \nabla_x^1 Q_{j,k} = Q_{j,k} - Q_{j-1,k}, \quad \Delta_x^1 Q_{j,k} = Q_{j+1,k} - Q_{j,k} \\ \text{式中: } A^+ &= (RA^+L)|_{x^1}, \quad B^+ = (RA^+L)|_{x^2}, \\ \tilde{F}_{j+1/2,k}^* &= [F_{j,k} + F_{j+1,k} + (R\phi)_{j+1/2,k}]/2, \quad \phi_{j+1/2,k} = [\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4]_{j+1/2,k}^T \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这里 I 为单位算子; 符号 $A^\pm$ 的定义同文献 [2]; 列阵 ϕ 的元素 φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 可由文献 [3] 里的 (7c) 式决定; 数值通量 G 的定义类似于 (11) 式中 $\tilde{F}$ 的定义; 矩阵 R 与 L 分别同 (8) 与 (9) 式的定义; 显然, (10) 式的左边可以看作文献 [2] 中 (8.4) 式在曲线坐标系 (x^1, x^2) 中的推广; 而 (10) 式的右边恰巧是 Harten 的 TVD 格式 [4] 推广到曲线坐标系时隐式格式的右端项 [3]。对于这个杂交格式的数值求解可采用向前和向后变换方向扫描的 LGS 推进迭代法, 即在完成一个时间步的具体计算时, 采用了向前向后扫描两次后, 才更新参变量值进行下一个时间步的计算。线性稳定性分析表明, 隐式矢通量分裂的松弛迭代法是无条件稳定的, 因此我们在完成算例时选取 Courant 数的值比一般隐式 AF 法还要大得多。

三、边界条件及典型算例

正如文献 [5, 6] 所论述的那样, 边界条件的提法与数值边界嵌入问题是十分重要的, 下面以叶栅流为例简作概述。由于 Euler 方程组属于双曲型, 基于特征分析可知存在着两条流特征、两条波特征; 根据其特征走向, 其定解条件可概括为进口: 给定 $P_0, T_0, \beta, \partial p / \partial t = 0$,

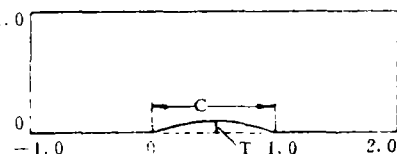


图 1 计算域及主要几何参数

(亚音进口); 出口: 给定反压 P_2 , $\partial u / \partial l = 0$, $\partial v / \partial l = 0$, (亚音出口); 叶面: 法向分速度为零; 周期边: 满足周期性条件;

这里 l 为拟流向; 符号 P_0 , T_0 , β , p_2 分别表示进口处的总压、总温、进气角、出口静压; 叶型表面的压力可由法向动量方程解出^[7]。对于超音速进口或超音速出口的边界条件提法可参阅文献 [5] 等。

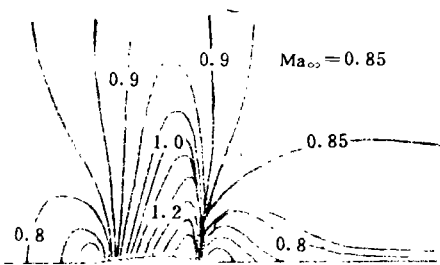


图 2 全场等马赫数分布

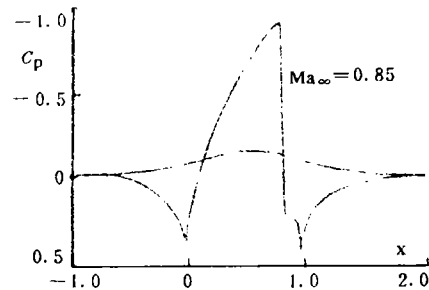


图 3 壁面压强系数沿轴向的分布

为了检验高分辨率杂交格式对于激波流场的模拟效果, 我们首先对著名的 GAMM 内流道算例进行了计算。这是一个下壁面包含一段圆弧的平直管道如图 1 所示, 算例 1 取相对厚度 $(T/C) = 0.042$, 进口马赫数 $Ma_\infty = 0.85$; $(T/C) = 0.10$, $Ma_\infty = 0.675$, $(Ma_\infty) = 0.85$, 网格取为 60×15 , 图 2 给出了全场等马赫线分布, 图 3 给出了上、下壁面压强系数 C_p 沿轴向的分布曲线, 显然在圆弧弦长的 82% 左右的地方捕捉到一道激波, 激波宽度占居两个网格间距, 激波前或激波后的 C_p 值没出现波动。计算中选取的 Courant 数为 50, 仅用 36 个时间步便收敛, 这要比一般 AE 算法快得多。

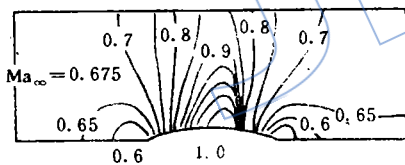


图 4 全场等马赫数分布曲线

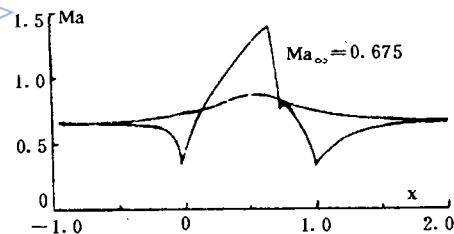


图 5 壁面马赫数分布曲线

算例 2. 计算域如图 1 ($Ma_\infty = 0.675$, $T/C = 0.10$) 网格取为 60×15 , 图 4 给出了全场等马赫数分布曲线, 图 5 给出了上、下壁面马赫数分布的计算结果。显然在圆弧弦长的 73% 左右处捕捉到一道激波, 它与文献 [8] 的结果稍微偏后点; 捕捉的激波宽度占两个网格间距, 激波前或激波后没出现数值波动, 这一数值结果与西工大周新海教授用显式的 TVD 格式 (Harten 格式) 计算所得结果^[9]较接近。

算例 3. 双圆弧 DCA2-8-10 压气机平面叶栅 ($Ma_\infty = 1.11$), $p_2/p_1 = 1.35$, 相对栅距为 0.85, 叶弦角为 55° ; 计算时选取 60×15 的 H 型网格, 取 Courant 数为 9, 采用本格式仅用 80 个时间步残差便下降三个数量级。图 6 给出了收敛历史, 可以看出曲线并无大的波动。图 7 给出了全场等马赫数曲线, 可以看到捕捉的激波与风洞纹影照像较接近。图 8 给出了叶面压力系数 S' (其定义为 $S' = (p_0 - p) / (p_0 - p_1)$) 与实验数据的比较。计算出的激波质量较高, 仅占

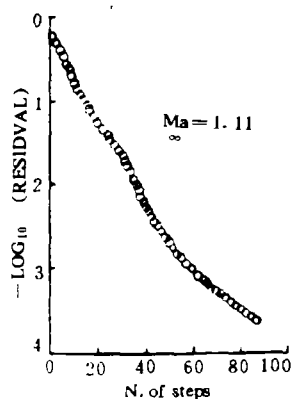
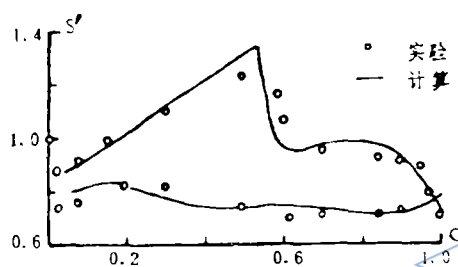
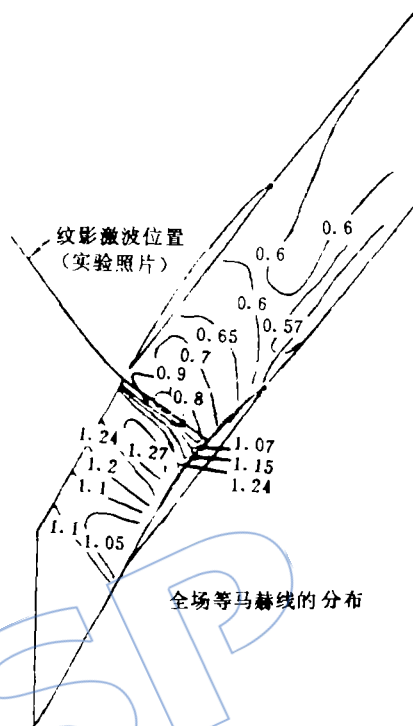
图 6 收敛史曲线 P_{t1} , P_{t2} 图 8 $Ma = 1.11$ 时叶面压力系数分布

图 7 全场等马赫数分布

两个网格,而且激波前或激波后无“低亏、过跳、”伪振荡现象。观察叶背和叶盆面上的气动参数,在波前或激波后没出现数值波动。另外,本文在计算 Harten 的数值通量 $\bar{F}$ 和 $\bar{G}$ 时(其定义见(10)、(11)式),选取格式粘性参数 ϵ (其定义同文献[4]的(3·16c)式中的 ϵ 值)等于 0.25;这个值的选择与数值粘性有关,它是一个十分重要的参数。本算例的计算结果还表明:用本格式捕捉的激波无论激波的形状和激波的宽度都是较满意的。

致谢:感谢力学所下荫贵教授对本工作的关心和帮助。

参 考 文 献

- [1] 张福信,“差分计算中激波上、下游解出现波动的探讨”,空气动力学学报,Vol. 2, No. 1, 1984.
- [2] Steger, J. L., Warming, R. F., “Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite Difference Methods”, J. Comp. Phys., Vol. 40, No. 2, April 1981.
- [3] H. C. Yee and A. Harten, “Implicit TVD Schemes for hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates”, AIAA J. Vol. 25, No. 2, 1987.
- [4] A. Harten, “On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes”, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 21, No. 1, 1984.
- [5] 沈孟育、周盛、林保真著,“叶轮机械中的跨音速流动”,科学出版社,1988年。
- [6] 李根深、陈乃兴、强国芳,“船用燃气轮机轴流式叶轮机械气动热力学”,国防工业出版社,1980年。
- [7] 马铁抗编著,“计算流体力学”,北京航空学院出版社,1986年。
- [8] Ni, R-H, “A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations”, AIAA, J. Vol. 20, No. 11, 1982.
- [9] 周新海,“叶栅激波流场的数值模拟与高分辨率差分格式”,中国工程热物理学会第六届年会论文 882083.

SOLUTION FOR TWO-DIMENSIONAL INVISCID TRANSONIC CASCADE FLOWS WITH MULTIPLE-GRID ALGORITHM

Sheng Chunhua and Wang Licheng

(Nanjing Aeronautical Institute)

ABSTRACT This paper gives an efficient form of multiple-grid scheme and presents a "prediction-correction" method for processing the boundary conditions on a solid wall. The convergence and the stability of the scheme can be further improved by using local time stepping and residual smoothing. Finally, two-dimensional inviscid transonic cascade flows are calculated. The comparison between the calculated and the measured results shows that this scheme possesses very fast convergence speed and satisfactory accuracy.

APPLICATION OF UPWIND FACTOR METHOD TO TRANSONIC CASCADE CALCULATION

Wang Licheng, Zhang Huimin, Lu Xiaoling

(Nanjing Aeronautical Institute)

ABSTRACT In this paper the upwind factor method is extended to treating the two-dimensional transonic flows. The Navier-Stokes equations with $k-\epsilon$ turbulence model are discretized in a non-orthogonal body-fitted coordinate system, and the upwind factor method is employed to ensure the numerical stability of the scheme. The maximum local time step is determined by the criterion that the coefficients in discretized equations must be non-negative.

The numerical experiments are carried out for DFVLR transonic cascade for inlet Mach number of 0.82 and 1.05, and numerical results are compared with the experimental data in good agreement. Also, the numerical results are compared with the results calculated with a four stage Runge Kutta time stepping scheme of an Euler code.

A NEW HYBRID SCHEME OF FLUX VECTOR SPLITTING-HARTEN'S TVD AND ITS APPLICATION

Wang Baoguo and Chen Naixing

(Institute of Engineering Thermophysics)

ABSTRACT A new high-resolution hybrid implicit scheme for solving the unsteady Euler flow equations to obtain steady solutions is provided in curvilinear coordinates. This scheme is mainly based on Steger-Warming's implicit flux vector splitting technique and Harten's numerical flux function. With the hybrid scheme, we obtain the discretized linear system with diagonally dominant coefficient matrix which enhances the convergence rate by use of the Line Gauss-Seidel relaxation procedure including backward and forward sweeps.

The numerical procedures were applied to three examples for steady transonic flows in a channel. Computational results shows the convergence rate is very high due to the very big time steps. The scheme is capable of obtaining weak solutions for system of hyperbolic conservation equations. It also can exclude expansion shocks and lead only to physically relevant solutions. The new algorithm reaches steady shock solutions on the grid with a one or two point monotone transition.